На правах рукописи

ЗАВЬЯЛОВА ТАТЬЯНА ВИКТОРОВНА

УСТОЙЧИВОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКАМИ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Специальность 01.01.02. – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2004

Работа выполнена в Уральском государственном университете путей сообщения на кафедре высшей математики.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, доцент Тимофеева Г.А.

Официальные оппоненты: — доктор физико-математических наук, профессор Пакшин П.В.,

кандидат физико-математических наук, доцент Ряшко Л.Б.

Ведущая организация: — Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

Защита состоится "____" ______________ 2004 г. в ____ часов на заседании диссертационного Совета К 212.286.02 по присуждению учёной степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу: 620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "____" _______________ 2004 г.

Учёный секретарь
диссертационного Совета
доктор физ. - мат. наук, профессор — В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение многих реальных процессов, происходящих в природе, технике, естествознании, связано с рассмотрением дифференциальных уравнений, параметры которых случайные функции времени. Математическое моделирование динамики таких систем проводится с помощью стохастических дифференциальных уравнений. Основы теории стохастических дифференциальных уравнений были заложены в работах К. Ито, Р.Л. Стратоновича, И.И. Гихмана, А.В. Скорохода, D. Williams, R.S. Bucy, A. Friedman и др. в пятидесятых годах прошлого века. В современной теории случайных процессов широкое распространение также получили модели, параметрами которых являются однородные марковские цепи с конечным числом состояний. Такое описание объекта управления оказалось наиболее полным, поскольку однородная марковская цепь несёт информацию о режиме (или структуре) объекта в данный момент времени, а фазовый вектор описывает его состояние в данном режиме. В отечественной литературе описанные системы называют системами со случайной структурой, а в западной литературе распространён термин «системы со скачками» (jump systems).

Одним из основных условий физической реализуемости эволюционного процесса является его устойчивость. Основы теории устойчивости и управления систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, заложены Н.Н. Красовским, И.Я. Кацом, Р.З. Хасьминским и Э.А. Лидским в начале 60-х годов 20 века. Круг исследования стохастических систем со структурными изменениями значительно расширяется в работах В.Н Афанасьева, В.Б. Колмановского, И.Я. Каца, Д.Г. Кореневского, Г.Н. Мильштейна, А.А. Мартынюка, А.И. Маликова, В.Р. Носова, П.В. Пакшина, Н.А. Пакшиной, Л.Б. Ряшко и др.

В работах И.Я. Каца, П.В. Пакшина, Н.А. Пакшиной, А.И. Маликова рассмотрены проблемы устойчивости систем со случайной структурой, в том числе и при предположении, что в случайные моменты скачкообразного изменения параметров системы фазовый вектор её состояния также может изменяться скачком. В работах этих авторов получены необходимые и достаточные условия вероятностной устойчивости, разработаны алгоритмы и методы исследования робастной устойчивости, изучены задачи управления и стабилизации стохастических систем со скачками в предположении, что условия скачка фазового вектора описываются неслучайными функциями.

Однако представляется естественной ситуация, когда в случайные моменты времени за счёт перехода системы из одного состояния в другое фазовый вектор изменяется скачком случайным образом. Скажем, если в механических системах изменение структуры связано со случайным скачкообразным изменением массы или геометрии системы, то корректная постановка задачи требует задания новых начальных условий, поскольку фазовый вектор оказался разрывным. Подобные проблемы возникают в виброударных, экономических и других сложных системах, связанных с частичным отказом элементов. В данной работе рассматриваются вопросы устойчивости систем случайной структуры при условии, что в момент смены структурного состояния скачком изменяется фазовый вектор, причём начальные условия для продолжения процесса являются случайными и зависят как от структурного состояния системы, так и от случайной величины с известными характеристиками распределения. Исследование устойчивости таких систем, проведённое в диссертационной работе, базируется на методах, использованных в монографии И.Я. Каца «Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры» для стохастических систем с детерминированным условием скачка фазового вектора.

Целью работы является исследование асимптотической устойчивости и устойчивости в среднем квадратичном линейных и нелинейных систем со случайной структурой и случайным условием скачка фазового вектора.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использованы теория вероятностей, теория случайных процессов, линейная алгебра, математический и функциональный анализ, методы теории устойчивости по Ляпунову и теории стохастической устойчивости. Для моделирования динамики процессов использован пакет программ Mat Lab.

Научная новизна работы. В диссертационной работе получены следующие новые научные результаты:

• Для линейной стационарной системы со случайной структурой и случайным условием скачка фазового вектора построена детерминированная система дифференциальных уравнений для моментов второго порядка. Устойчивость полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений влечет устойчивость исходной стохастической системы со случайными скачками фазового вектора. Для одномерной системы со случайными скачками фазового вектора получены условия для параметров случайного скачка, при выполнении которых неустойчивая стохастическая система без скачков становится устойчивой при их появлении.

• Получены выражения усреднённой производной в силу системы со случайной структурой со скачками для двух основных типов марковских процессов. На основе этих результатов проведено исследование устойчивости нелинейных стохастических систем со случайными скачками фазового вектора.

• Методом первого приближения получены достаточные условия асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном нелинейной стохастической системы со случайными скачками.

• В качестве системы первого приближения рассмотрена система со случайной структурой, полученная «замораживанием» коэффициентов. Для этого случая получены достаточные условия, налагаемые на вероятностные характеристики марковского процесса, а также на параметры нелинейной системы и параметры скачка, при которых нелинейная система со скачками экспоненциально устойчива в среднем квадратичном.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории устойчивости систем со случайной структурой. Практически результаты могут быть использованы при моделировании сложных динамических систем с отказами механизмов и других нарушениях. Применение результатов работы позволит стабилизировать работу динамических систем со случайными сбоями, поскольку во многих случаях случайным изменением начальных условий фазового вектора можно неустойчивую систему со случайной структурой привести в устойчивое состояние.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на открытых научных семинарах кафедры «Кибернетика» Московского государственного института электроники и математики под руководством проф. В.Н. Афанасьева; кафедры «Теоретическая механика» УрГУ под руководством проф. Ю.Ф. Долгого; кафедры «Высшая математика» УрГУПС под руководством проф. И.Я. Каца и доц. Г.А. Тимофеевой.

Основные результаты диссертации докладывались на 7-ом и 8-ом международных семинарах «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (г. Москва, июнь 2002 г., 2004 г.); на международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели» (г. Челябинск, февраль 2002 г.); на 2-ом международном конгрессе "Нелинейный динамический анализ" (г. Москва, 2002 г.); на международной научно-технической конференции "Кибернетика и технологии 21 века" (г. Воронеж, 2002 г.); на Всероссийской научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования – транспорту-2000» (УрГУПС, Екатеринбург, 2000 г.); на научно-технической конференции «Молодые учёные – транспорту» (УрГУПС, Екатеринбург, 2001 г.); на Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта» (УрГУПС, Екатеринбург, 2003 г.); на Всероссийской конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (УрГУ, г. Екатеринбург, февраль 2004 г.); на 35-ой региональной молодёжной школы-конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики» (г. Екатеринбург, 2004 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в [1-13].

Структура и объём диссертации. Основной текст диссертации состоит из введения, двух глав, приложения и списка литературы, содержащего 84 названия. Диссертационная работа занимает 112 машинописных страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обзор современного состояния исследуемой проблемы, приведён обзор работ российских и зарубежных авторов, изучавших близкие задачи, кратко изложено содержание работы.

В первой главе рассматривается задача устойчивости в среднем квадратичном линейной стационарной стохастической системы, испытывающей параметрическое воздействие простой марковской цепи с конечным числом состояний. Характеристика движения осложнена тем, что в моменты случайного скачкообразного изменения структуры системы, так же скачком изменяются координаты фазового вектора. Первая глава объединяет 6 параграфов.

В § 1 рассматривается постановка задачи, а также вводятся все необходимые определения стохастической устойчивости системы, описанной следующим уравнением

$$dx = A\,(y(t))xdt + \sum_{\nu=1}^{l} \sigma_\nu\,(y(t))xdw_\nu\,(t)\,, \tag{1}$$

где $x \in R^{(n)} - n-$ вектор фазовых координат системы, время t может изменяться в области $I = \{t : t \ge t_0\}$. Вектор-функция $y(t)$, описывает воздействие случайных параметрических возмущений, действующих на систему. Предполагается, что при каждом $t \in I$ функция $y(t)$ принимает значения из множества $Y = \{y_1, \dots, y_k\} \subseteq R^{(r)}$ и является простой марковской цепью, переходные вероятности которой допускают разложение

$$P\{y(t) = y_j \big|\, y(s) = y_i \ne y_j\} = q_{ij} \cdot (t-s) + o(t-s) \tag{2}$$

$$P\{y(\tau) \equiv y_i, s \le \tau \le t \big|\, y(s) = y_i\} = 1 - q_i \cdot (t-s) + o(t-s), \tag{3}$$

где q_{ij} – известные величины, характеризующие интенсивность переходов марковской цепи. Будем говорить, что при $y(t) = y_i$ система (1) находится в i-ом структурном состоянии. $o(t-s)$ – бесконечно малая величина при $t \to s$, более высокого порядка малости, чем $(t-s)$. Функция $w(t) = \{w_1(t), \dots, w_m(t)\}$ является m – векторным винеровским процессом. $A(y(t)), \sigma_\nu\,(y(t))$ – матрицы размерности $n \times n$, определенные при каждом $y(t) \in Y$.

Предполагается, что в случайный момент времени $t=\tau$ при переходе системы (1) из состояния $y(\tau-0)=y_i$ в состояние $y(\tau)=y_j\neq y_i$ с переходными вероятностями (2), (3) происходит скачок фазового вектора согласно соотношению

$$x(\tau)=K_{ij}x(\tau-0)+\sum_{s=1}^{N}\xi_s Q_s x(\tau-0), \tag{4}$$

где $x(\tau)-n-$вектор фазовых координат системы (1), непрерывный справа, то есть $x(\tau)=x(\tau+0)$; K_{ij} –известные матрицы размерности $n\times n$, $i,j=1,\dots,k$, $i\neq j$, зависящие от структурного состояния системы; Q_s –известные матрицы размерности $n\times n$; ξ_s – независимые случайные величины, для которых выполняется $M\xi_s=0$, $M\xi_s^2=1$ (M – знак математического ожидания). Предполагается, что случайные величины ξ_s не зависят от реализации винеровского процесса $w(t)$ и состояний марковской цепи $y(t)$. Для различных моментов времени τ соответствующие случайные вектора ξ_s также независимы.

В §2 строятся моментные уравнения для стохастической системы (1), (4). Показывается, что дифференциальные уравнения для моментов первого порядка системы имеют вид

$$\dot{m}_i=(A_i-q_iE)\,m_i+\sum_{j\neq i}^{k}q_{ji}\,K_{ji}\,m_j\,, \tag{5}$$

и не зависят от постоянных матриц Q_s, $s=1,\dots N$.

Здесь обозначено $A_i=A(y_i)$, $q_i=\sum_{i\neq j}q_{ij}$, $m_i(t)=M[x(t)\chi_i(y(t))|x_0,y_0]$, $i,j=1,\dots,k$, $i\neq j$ и $\chi_i(y_j)=\begin{cases}1, & при \quad i=j\\ 0, & при \quad i\neq j\end{cases}.$

В этом же параграфе рассмотрена проблема экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы (1), (4). Для систем такого типа строятся матричные дифференциальные уравнения для вторых условных моментов решения, анализ которых позволяет исследовать среднеквадратическую устойчивость исходной стохастической системы. Доказывается следующее утверждение. Здесь и далее нумерация теорем и утверждений такая же, как в основном тексте диссертации.

ТЕОРЕМА 2.1. Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном системы со случайной структурой (1), испытывающей воздействие марковской цепи с известными параметрами распределения (2), (3), и со случайным условием скачка (4) необходимо и достаточно, чтобы была экспоненциально устойчива детерминированная система матричных дифференциальных уравнений для моментов второго порядка

$$\dot{M}_i = A_i M_i + M_i A_i' - q_i M_i + \sum_{j\neq i}^{k} q_{ji} K_{ji} M_j K_{ji}' + \\ + \sum_{j\neq i}^{k} \left(\sum_{s=1}^{N} Q_s M_j Q_s'\right) q_{ji} + \sum_{\nu=1}^{l} \sigma_{\nu i} M_i \sigma_{\nu i}' , \tag{6}$$

которые следует решать при начальных условиях

$$M_i(0) = x_0 (x_0)' \chi_i(y_0), \quad i = 1, \ldots, k .$$

Здесь введено обозначение $M_i(t) = M\,[\,x(t)\; x'(t)\, \chi_i\,(y(t)) \,|\, x_0, y_0\,]$.

В доказательстве теоремы показано, что исследование среднеквадратической устойчивости стохастической системы со скачками сводится к анализу устойчивости детерминированной системы для моментов второго порядка.

В § 3 анализируются условия устойчивости в среднем квадратичном с помощью построенной системы для условных моментов второго порядка. Особое внимание уделяется особенностям случайных разрывов фазовой траектории, а именно, ищется ответ на вопрос: каким условиям должны удовлетворять параметры скачка фазового вектора, чтобы система со случайной структурой была экспоненциально устойчивой в среднем квадратичном. В качестве примера рассмотрено линейное дифференциальное уравнение со случайной структуры, независящего от компонентов винеровского процесса, и случайное условие скачка фазового вектора. Проведённые исследования приводят к выводу о том, что детерминированная часть скачка должна стремиться к единице, а случайная составляющая должна быть мала в окрестности невозмущённого движения. Найдены условия, налагаемые на параметры скачка фазового вектора, при которых неустойчивую систему случайной структуры без скачков можно привести в устойчивое положение.

В § 4 представлен вывод усреднённой производной (или производящего дифференциального оператора) в силу линейной системы со случайной структурой (1) (обозначаемое далее $\left[\frac{dM[V]}{dt}\right]_{(1)}$) и случайным условием скачка фазового вектора (4) для двух основных типов марковского процесса. В случае если случайный процесс $y(t)$ является простой марковской цепью справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. Для усредненной производной квадратичной функции $V(t,x,y)$ в силу системы (1), зависящей от параметров простой марковской цепи (2), (3), и с условием скачка фазового вектора (4) в точке $(s,x,y_i)\in F$ справедлива формула

$$\left[\frac{dM[V]}{dt}\right]_{(1)}=\frac{\partial V(s,x,y_i)}{\partial s}+\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]' A(s,y_i)x+\frac{1}{2}tr\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma(s,x,y_i)\sigma'(s,x,y_i)\right]+$$

$$+\sum_{j\neq i}^{k}[V(s,K_{ij}x,y_j)+V(s,\sum_{s=1}^{N}Q_s x,y_j)-V(s,x,y_i)]\,q_{ij}\ . \qquad (7)$$

Здесь $V(t,x,y)$ – квадратичная форма по переменной x, определённая в области F:

$$x\in R^{(n)},\ y\in Y,\ \ t\geq 0, \qquad (8)$$

Если компоненты $y_s, \quad s=1,\ldots,r, \quad r$ – вектора $y(t)$ образуют между собой чисто разрывные марковские процессы, допускающие разложение

$$P\{y_s(t+\Delta t)\in(\beta,\,\beta+\Delta\beta)\big|y_s(t)=\alpha\neq\beta\}=q_s(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P\{y_s(\tau)\equiv\alpha,\, t<\tau\leq t+\Delta t\big|y_s(t)=\alpha\}=1-q_s(t,\alpha)\Delta t+o(\Delta t), \tag{9}$$

где $q_s(t,\alpha,\beta), q_s(t,\alpha)$ – известные функции, причем, $q_s(t,\alpha,+\infty)=q_s(t,\alpha)$, то справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.2. Для усредненной производной квадратичной функции $V(t,x,y)$ в силу системы (1), подверженной параметрическому воздействию чисто разрывного марковского процесса $y(t)\in\left[\eta_1,\eta_2\right]$ с переходными вероятностями (9), и с условием скачка фазового вектора (4) в точке $(s,x,\alpha)\in F$ справедлива формула

$$\left[\frac{dM[V]}{dt}\right]_{(1)}=\frac{\partial V(s,x,\alpha)}{\partial s}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)' A(s,\alpha)x+\frac{1}{2}tr\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma\sigma'\right]+$$

$$+\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}[V(s,K(\alpha,\beta)x,\beta)+V(s,\sum_{s=1}^{N}Q_s x,\beta)-V(s,x,\alpha)]d_\beta q(s,y,\beta). \tag{10}$$

В § 5 проведено исследование устойчивости в среднем квадратичном линейной стохастической системы (1), (4) с помощью метода функций Ляпунова. Получен аналог матричного уравнения Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для системы (1) – (4) справедлива следующая система матричных дифференциальных уравнений:

$$G_i A_i + A_i' G_i + \sum_{\nu=1}^{l}\sigma_{\nu i}' G_i \sigma_{\nu i} + \sum_{i\neq j}(K_{ij}' G_j K_{ij} + \sum_{s=1}^{N} Q_s' G_j Q_s - G_i)\, q_{ij} = -C_i,$$

$$i, j = 1,...,k, \quad i \neq j \ . \tag{11}$$

где $C_i = C(y_i)$, $G_i = G(y_i)$ – симметричные, положительно определённые матрицы размерности $n \times n$ соответствующих квадратичных форм $W(x, y_i) = x'C(y_i)x$, $V(x, y_i) = x'G(y_i)x$ по переменной x. В равенстве (11) обозначено $A_i = A(y_i), \sigma_{\nu i} = \sigma_\nu(y_i), \quad i, j = 1,...,k, \ i \neq j$.

Это уравнение позволяет получить ряд алгебраических критериев экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном, в зависимости от выбора функции $W(x, y(t))$.

В § 6 смоделирована динамическая система, описывающая движение материальной точки по циклоиде с параметром, зависящим от простой марковской цепи с двумя состояниями. В момент перехода из первого состояния во второе фазовый вектор изменяется скачком случайным образом. Для этой системы получены условия устойчивости в среднем квадратичном с помощью метода моментов. Второй пример в этом параграфе иллюстрирует применение метода функций Ляпунова к системе со случайной структурой со скачками.

Вторая глава диссертации (§7-§11) посвящена исследованию нелинейных стохастических систем со случайными скачками фазовых координат системы. Здесь рассматриваются некоторые приложения основных теорем о вероятностной устойчивости, прежде всего для изучения влияния изменений параметров системы и параметров случайного скачка на устойчивость системы. По аналогии с детерминированными системами такая задача носит название задачи об устойчивости по первому приближению. Многообразие возникающих здесь постановок задач связано со способом выбора системы первого приближения и характером близости между исходной и упрощённой системами.

В частности, в **§8** изучается поведение системы

$$dx = \left[A(t, y(t))x + R(t, x, y(t))\right]dt + \sum_{\nu=1}^{l}\left[\sigma_\nu(t, y(t))x + S_\nu(t, x, y(t))\right]dw_\nu(t) \tag{12}$$

с нелинейным условием скачка

$$x(\tau) = K_{ij}x(\tau - 0) + \xi\ \Psi_{ij}(x(\tau - 0)), \tag{13}$$

где $A(t, y(t)), \sigma_\nu(t, y(t))$ – известные $n \times n$ – матрицы с заданными свойствами, а вектор-функции $R(t, x, y(t)), S_\nu(t, x, y(t))$ удовлетворяют условиям Липшица и, кроме того, условиям

$$\|R(t, x, y(t))\| \le \gamma\|x\|, \quad \|S_\nu(t, x, y(t))\| \le \gamma\|x\|, \quad \|\Psi_{ij}(x)\| \le \gamma\|x\|, \tag{14}$$

где γ – некоторая положительна постоянная.

В качестве системы первого приближения рассматривается линейная стохастическая система

$$dx(t) = A(t, y(t))xdt + \sum_{\nu=1}^{l}\sigma_\nu(t, y(t))xdw_\nu(t) \tag{15}$$

и линейное условие скачка фазового вектора $x(t)$

$$x(\tau) = K_{ij}x(\tau - 0) \tag{16}$$

Для системы (12), (13) справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8.1. Если невозмущенное движение $x = 0$ системы (15) с условием скачка фазового вектора (16) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном, а постоянная $\gamma > 0$ в условии (14) достаточно мала, то невозмущенное движение полной системы (12) с условием скачка (13) асимптотически устойчиво по вероятности в целом, и экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном.

Также приводится модификация этого утверждения на случай, если нелинейные добавки $R(t, x, y), S_\nu(t, x, y), \Psi_{ij}(x)$ малы в среднем по времени, то есть

$$\|R(t, x, y)\| \le \omega(t)\|x\|, \quad \|S_\nu(t, x, y)\| \le \omega(t)\|x\|, \quad \|\Psi_{ij}(x)\| \le \omega(t)\|x\|, \tag{17}$$

где $\omega(t)$ – непрерывная ограниченная функция в области F, для которой существует такое положительное число $T > 0$, что при всех $t_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\omega(t)\,dt < \gamma, \tag{18}$$

где γ – положительная постоянная.

В § 9 смоделирован процесс, описывающий присоединение или отбрасывание случайной массы тела, закреплённой на пружине с известным коэффициентом жёсткости. Методом моментов второго порядка получены достаточные условия устойчивости такого процесса. В этом же параграфе исследуется вопросы устойчивости такой системы, при условии, что на тело действует некоторая возмущающая сила. Демонстрируется применение метода первого приближения.

В §10 параграфе изучается задача об устойчивости по первому приближению системы со случайной структурой

$$dx = f(t, x, y(t))dt + \sigma(t, x, y(t))dw(t), \tag{19}$$

где непрерывные функции $f(t, x, y)$, $\sigma(t, x, y)$ имеют в области F непрерывные и ограниченные производные по x до второго порядка включительно:

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\| \le N\|x\|, \quad \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\| \le N\|x\|, \quad \left\|\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right\| \le N\|x\|, \quad \left\|\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}\right\| \le N\|x\|, \tag{20}$$

где $N > 0$ некоторая постоянная.

Пусть в случайные моменты скачкообразного изменения вектора состояния системы $y(t)$ фазовый вектор $x(t)$ так же изменяется скачком по закону:

$$x(\tau) = K(\alpha,\beta)x(\tau-0) + \sum_{s=1}^{N}\xi_s Q_s x(\tau-0), \qquad (21)$$

где $\tau-$момент перехода системы из состояния $y(\tau-0)=\alpha,$ в состояние $y(\tau+0)=\beta\neq\alpha$; ξ_s-независимые случайные величины, для которых $M\xi_s=0,\ M\xi_s^2=1$; $K(\alpha,\beta)-$матрица размерности $n\times n$, характеризующая переходное состояние фазового вектора в момент смены структурного состояния $y(t)\in Y$; Q_s-известные матрицы с постоянными коэффициентами размерности $n\times n$. Предполагается, что в окрестности невозмущённого движения $x=0$ параметры скачка фазового вектора ограничены:

$$\|K(\alpha,\beta)-E\|\leq\gamma, \quad \|Q_s\|\leq\gamma, \qquad (22)$$

при всех $\alpha,\beta\in Y$. Здесь γ – некоторая положительная постоянная.

Предполагается, что системой первого приближения является детерминированная система, полученная «замораживанием случайности» и имеет вид

$$dx_\nu = f(t,x_\nu,\nu)dt + \sigma(t,x_\nu,\nu)dw(t). \qquad (23)$$

где ν – некоторое фиксированное значение марковского процесса. Будем предполагать, система (23) равномерно устойчива по параметру ν, то есть

$$M[\|x_\nu(t)\|^2 \big| x_\nu(t_0)=x_0] \leq A\|x_0\|^2 e^{-\lambda(t-t_0)}, \qquad (24)$$

причем, постоянные $A>0,\ \lambda>0$ не зависят от структурного значения системы $\nu\in Y$ при всех $t>t_0$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть невозмущенное движение системы с неизменной структурой (23) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном равномерно по параметру $\nu\in Y$ и выполнено условие (24), кроме того, для системы со случайной структурой (19) и случайным условием скачка (21) справедливы условия (20), (22), а процесс $y(t)$ изменения структурного состояния является чисто разрывным марковским процессом (9). Тогда существует такая постоянная $\theta > 0$, что при выполнении условия

$$\pi(t, y) = 2\gamma \int_Y |\beta - \alpha| p(s, \alpha, \beta) d\beta < \theta$$

невозмущенное движение системы (19), (21) будет экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном.

Требование, предъявляемое теоремой 10.1 к системе первого приближения (23), является довольно жёстким (в условии теоремы 10.1 требуется, чтобы система (23) была экспоненциально устойчива при каждом значении $\nu \in Y$). Поэтому рассмотрен случай, когда система первого приближения (23) с неизменной структурой экспоненциально устойчива в среднем квадратичном равномерно по ν лишь на некотором замкнутом множестве $H \subset Y$. А на множестве $T = Y \setminus H$ система первого приближения (23), вообще говоря, не обладает этим свойством. В этом случае для экспоненциальной устойчивости системы (19), (21) оказывается достаточным, чтобы для чисто разрывного марковского процесса $y(t)$ выполнялись следующие ограничения

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} M[|y(t + \Delta t)| \mid y(t) = y \in S] < \sigma_1,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} P\{y(t + \Delta t) \in T \mid y(t) = y \in S\} < \sigma_2,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} P\{y(t + \Delta t) \in S \mid y(t) = y \in T\} > \sigma_3,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – некоторые положительные постоянные, а для параметров скачка достаточно выполнения условий (22). Полученные условия означают, что система (19), (21) будет экспоненциально устойчивой в среднем квадратичном, если вероятность перехода системы из устойчивых состояний в неустойчивые достаточно мала, тогда как вероятность обратных переходов достаточно велика. При этом, как и в теореме (10.1), параметры скачков малы и средняя скорость изменения процесса $y(t)$ тоже мала, пока эти случайные изменения происходят на множестве устойчивых состояний.

Основные публикации по теме диссертации

1. Завьялова Т.В., Кац И.Я., Моментное уравнение и исследование устойчивости линейных систем со случайно изменяющейся структурой. Труды Всероссийской научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные исследования – транспорту-2000".– УрГУПС.– Екатеринбург.– 2000.– С. 449-450.
2. Завьялова Т.В. Устойчивость невозмущенного движения нелинейных стохастических систем с разрывными фазовыми траекториями. Сборник трудов УрГУПС. Том 2.– 2001.– С. 107-115.
3. Завьялова Т.В. Устойчивость стохастических систем со случайным условием скачка фазовой траектории. Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели».– Челябинск.– 2002.– С. 35-36.
4. Завьялова Т.В. Об устойчивости нелинейных стохастических систем со случайным условием скачка фазового вектора. Тезисы докладов 7-го международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Москва.– 2002.– С. 88-90.
5. Завьялова Т.В. К вопросу об устойчивости стохастических систем с разрывными фазовыми траекториями. Тезисы докладов 2-го Международного конгресса "Нелинейный динамический анализ". – Москва.– 2002.– С. 75-77.
6. Завьялова Т.В., Кац И.Я., Тимофеева Г.А. Об устойчивости движения стохастической системы со случайным условием скачка фазовой траектории. //Автоматика и телемеханика.– 2002.– №7– С. 33-46.

7. Завьялова Т.В. Условия стабилизации линейных стохастических систем со структурными изменениями и случайными разрывами фазовых траекторий. Сборник трудов 3-ей Международной научно-технической конференции "Кибернетика и технологии 21 века".– Воронеж – 2002.– С. 11-21.

8. Zavialova T.V. The analysis of stability of non-linear stochastic system with random impulse in condition of phase vector shock, proceedings of the "10th International Symposium on Dynamic Games and Applications". – St.-Peterburg 2002. vol. 2.– p. 903-906.

9. Завьялова Т.В. Стабилизация стохастических систем, испытывающих воздействие марковского процесса. Сборник научных трудов конференции «Молодые учёные – транспорту».– Екатеринбург.– УрГУПС.– 2003. С. 448-457.

10. Завьялова Т.В. Метод функций Ляпунова в исследовании среднеквадратической устойчивости. Тезисы докладов Всероссийской конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач». Екатеринбург. УрГУ, 2004.– С. 161.

11. Завьялова Т.В. Устойчивость стохастических систем по первому приближению. // Вестник молодых учёных, серия «Прикладная математика и механика».– Санкт Петербург– 2004– №1– С. 23-29.

12. Завьялова Т.В. Моделирование движения тела переменной массы. Материалы региональной молодёжной школы-конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики».– Екатеринбург.– 2004.– С. 128-132.

13. Завьялова Т.В. Устойчивость динамических систем со случайными скачками вектора состояний. Тезисы докладов 8-го международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления".– Москва.– 2004. С. 68-69.

Завьялова Татьяна Викторовна

Устойчивость стохастических систем со случайными скачками фазовых траекторий

Специальность 01.01.02. – дифференциальные уравнения

Подписано в печать 7.09.04

Бумага писчая № 1 Формат 60x90 1/16 Объём 1,2 п.л.

Тираж 100 Заказ

Типография УрГУПС, 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66